TITLE:

EXPONENTIALLY GROWING SOLUTIONS, THE INVERSE CONDUCTIVITY PROBLEM AND THE CAUCHY PROBLEM (Variational Problems and Related Topics)

AUTHOR(S):

池畠, 優

CITATION:

池畠, 優. EXPONENTIALLY GROWING SOLUTIONS, THE INVERSE CONDUCTIVITY PROBLEM AND THE CAUCHY PROBLEM (Variational Problems and Related Topics). 数理解析研究所講究録 2001, 1181: 38-51

ISSUE DATE:

2001-01

URL:

http://hdl.handle.net/2433/64571

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1181 巻 2001 年 38-51

EXPONENTIALLY GROWING SOLUTIONS, THE INVERSE CONDUCTIVITY PROBLEM AND THE CAUCHY PROBLEM

池畠　優 (MASARU IKEHATA)

群馬大学工学部

1. Carleman タイプの公式

大雑把に言って, ある領域での楕円型方程式の解の領域内での値を, その境界の一部における Cauchy データを使って表示する公式を Carleman タイプの公式と呼ぶ。

この公式の起原は Carleman 自身による本[3] に遡るようである。彼は複素平面内の, 与えられた点 z_0を頂点とする開き角が$\pi\alpha\,(0<\alpha<1)$ である角領域を考えた。その境界から z_0を除いた部分は二つの半直線からなるがそれぞれから点 z_1, z_2をとる。z_1と z_2を結ぶ滑らかな曲線 C で中間点はすべてその角領域に横たわっているものを考える。このとき線分 z_0z_1, z_0z_2および曲線 C で囲まれた単連結領域 D が定まる。角領域を 2 等分する直線を l と書こう。Carleman は次の公式を述べている。

定理 1.1. $f(\cdot)$ は$\overline{D}$で連続かつ D で解析的な関数であるとする。与えられた $z\in l\cap D$ に対し公式

$$f(z)=\lim_{\tau\longrightarrow\infty}\frac{e^{-\tau}}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{e^{\tau\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{1/\alpha}}}{\zeta-z}d\zeta \tag{1.1}$$

が成り立つ。

この公式は $z\in l\cap D$ における $f(\cdot)$ の値が C 上におけるそれのみで計算できることを述べていて, Cauchy の積分公式とはその点が異なる。$f(\cdot)$ は Cauchy-Riemann の方程式系の解であり, その C 上の Cauchy データはまさに $f(\zeta)$, $\zeta\in C$ であるから, これは最初に述べた Carleman タイプの公式の起原と呼ぶべきであろう。

実はこの公式とともに, 後に Carleman の補題と呼ばれる次の評価も証明されている。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

定理 **1.2.** z を $l \cap D$ 上の点とする。不等式

$$|f(z)| \leq M^{1-(\frac{r}{R})^{1/\alpha}} m^{(\frac{r}{R})^{1/\alpha}} \tag{1.2}$$

が成り立つ。ここで M, m, R および r は

$$M = \sup_{\zeta \in z_1 z_0 z_2} |f(\zeta)|,$$
$$m = \sup_{\zeta \in C} |f(\zeta)|,$$
$$R = dist(z_0, C),$$
$$r = |z_0 - z|$$

で与えられる量である。

なお (1.2) の証明は (1.1) を使うのではなく，最大値の原理により間接的になされている。(1.2) は，M が押さえられている限り，対応 $f|_C \longmapsto f(z)$ は連続性があるということを述べていて，これは，条件付き安定性の評価と呼ばれるものの原型である。面白いことに，その後は定理 1.1 か定理 1.2 のどちらに注目するかで，研究の方向が別れていったように見える。

この論文ではひたすら定理 1.1 の方向に注目する。さて現在では，定理 1.1 は，より一般的な Goluzin-Krylov の Carleman タイプの公式 ([1, Theorem 1.1]) の特別な場合とみなされている。その方法は，領域の Green 関数から，その境界の一部のその領域に関する調和測度を構成し，それから Carleman タイプの公式の積分核を構成するものである。この方法は，Cauchy-Riemann の方程式系の解にたいする Carleman タイプの公式を，領域が単連結および Cauchy データを与える境界の一部の Lebesgue 測度が正であるときにもたらした。したがって 2 次元の調和関数にたいする Carleman タイプの公式は完成しているといってよいであろう。他の方法も含めて一変数および多変数の関数論における Carleman タイプの公式については Aizenberg [1] の本に詳しく述べられている。

では一歩すすんで定常 Schrödinger 方程式

$$-\triangle u + Vu = 0 \text{ in } \Omega \tag{1.1}$$

の場合はどうであろうか？ ここでΩは 2 次元または 3 次元の有界領域で $V = V(x)$ は本質的に有界な複素数値関数とする。この方程式に対する Cauchy 問題は応用上極めて重要であり逆問題などで至るところ現れる。$\partial\Omega$ の一部Γ上における u の Cauchy データ

$$(u_{|\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma})$$

から直接Ω内の各点における u の値を計算する公式があるかというのが問いである。Tarkhanov の本[24] をみるとこの問いに対する満足な答えはないように見える。

ここでは, 領域が特別な形をしているときに, そのような公式がはっきり閉じた形で与えられるということ ([11]) およびその簡単な応用として, 定常 Schrödinger 方程式にたいする一意接続定理の証明が得られるということを述べよう。

1.1 Schrödinger 方程式に対する Carleman タイプの公式.

B で 3 次元の原点を中心とする半径 1 の開球をあらわす。ここでは $|t|<1$ を満たす t に対し

$$\Omega = B \cap \{x_3 > t\}$$

で与えられる領域Ωにおいて (1.1) の解 u に対して Carleman タイプの公式を述べよう。[11] では, B が単に凸のときの対応する公式が述べられているが証明は全く変わらない。

u の正則性は $u \in H^2(\Omega)$ を仮定する。このときΩ は凸であるから, その境界は Lipschitz であり, $u|_{\partial\Omega}$, $\frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}$ がトレースとして定まる (Grisvard [4] をみよ)。$\Gamma = \partial B \cap \{x_3 > t\}$ とおく。

Problem u のΓ上における Cauchy データから, u のΩにおける値を計算する公式を探すこと。

これに対し以下のような解答を得た。

Ω内の点 y を勝手に与える。y を一つの頂点とし他の点は半空間 $x_3 < y_3$に横たわる四面体 D を考える。$\tau > 0$ とする。平面 $x_3 = y_3$ の上下で$\tau \longrightarrow \infty$ のとき指数的に増大, 減少する調和関数

$$e^{\tau(x_3-y_3)}e^{i\tau x_1}$$

を考える。

$\tilde{V}$で V のΩの外への 0 拡張を表わす。D の特性関数をχ_Dと書こう。このとき次の方程式

$$-\triangle v + \tilde{V}v = \chi_D e^{\tau(x_3-y_3)}e^{i\tau x_1} \text{ in } \mathbb{R}^3 \tag{1.2}$$

で

$$v(x) \sim e^{\tau(x_3-y_3)}e^{i\tau x_1} \text{ as } \tau \longrightarrow \infty$$

を満たすものを構成できる。$\sim$の意味はここでははっきり述べることはやめておく。要はなんらかの意味で, $\tau \longrightarrow \infty$ のとき v は $e^{\tau(x_3-y_3)}e^{i\tau x_1}$ と同じ振る舞いをする, ということである。このような v は exponentially growing solution と呼ばれる。

v は

$$v = e^{\tau(x_3-y_3)}e^{i\tau x_1}w$$

という形で構成され, w はつぎの積分方程式の解である。

$$w(x) + \int_{\mathbb{R}^3} g_\tau(x-y)\tilde{V}(y)w(y)dy = \int_{\mathbb{R}^3} g_\tau(x-y)\chi_D(y)dy. \tag{1.3}$$

ここで $g_\tau(x)$ は

$$g_\tau(x) = (\frac{1}{2\pi})^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2 - 2i\tau(\xi_3 + i\xi_1)} d\xi$$

で定まる distribution で

$$\{\triangle + 2\tau(\partial_3 + i\partial_1)\}g_\tau(x) + \delta(x) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3$$

を満たす。

このとき distribution

$$G_\tau(x) = e^{\tau(x_3-y_3)}e^{i\tau x_1}g_\tau(x)$$

は Laplace 方程式の基本解であり Faddeev の Green 関数と呼ばれる。Faddeev の Green 関数は次節で論じる Calderón[2] の提出した境界値逆問題 (Uhlmann [26] も参照) や逆散乱問題で中心的な役割を果した。

(1.3) の解の構成の概略は次のとおり。$-1 < \delta < 0$ とする。対応

$$f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^3} g_\tau(\cdot - y)f(y)dy \tag{1.4}$$

が重み付き L^2空間 $L^2_{\delta+1}(\mathbb{R}^3) \equiv \{f\,|\,(1+|x|^2)^{(\delta+1)/2}f \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$ から $L^2_\delta(\mathbb{R}^3) \equiv \{f\,|\,(1+|x|^2)^{\delta/2}f \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$ の中への有界作用素でその作用素ノルムが $O(\tau^{-1})$ で評価できることを示す。この証明は, スケーリングを使って$\tau = 1$ のときの (1.4) の有界性に帰着させ, 次に $g_1(x)$ のξ空間での表示を使って$\tau = 1$ のときの (1.4) を分解し, 結局対応

$$(\partial_3 + i\partial_1)^{-1}f(x_1,x_3) = (\frac{1}{2\pi})^2 \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\frac{f(\xi_1,\xi_3)}{i\xi_3 - \xi_1} d\xi$$

の $L^2_{\delta+1}(\mathbb{R}^2)$ から $L^2_\delta(\mathbb{R}^2)$ の中への有界性に帰着させることによる。この最後の主張は Cauchy-Schwartz の不等式をうまく使って証明されている (Sylvester-Uhlmann [23, Lemma 3.1])。これより$\tau >> 1$ のとき (1.3) の解が $L^2_\delta(\mathbb{R}^3)$ でつかまることがわかる。あとはその 2 階までの微分を評価してやれば (例えば Nachman[19]) 次の補題を得る。

補題 1.1. $\|w\|_{H^2(\Omega)}$は$\tau \longrightarrow \infty$ のときτに関して高々代数的に増大する。

実際は $\|w\|_{H^2(\Omega)} = O(\tau)$ であるがそこまではいらない。

ひとたび v が構成されると, Ωにおける (1.2) の両辺に (1.1) の解 u をかけΩで積分して部分積分により等式

$$\begin{aligned}(1.5)\qquad &\int_D e^{\tau(x_3-y_3)}e^{i\tau x_1}udx\\ &=\int_{\partial B\cap\{x_3>t\}}(\frac{\partial u}{\partial\nu}v-\frac{\partial v}{\partial\nu}u)d\sigma(x)+\int_{B\cap\{x_3=t\}}(\frac{\partial u}{\partial\nu}v-\frac{\partial v}{\partial\nu}u)d\sigma(x)\end{aligned}$$

を得る。

さて D の境界∂D は, y を頂点とする三つの三角形と y 含まない三角形から成る。∂D にたいする外向き単位法線ヴェクトル場はこれら各三角形上一定のヴェクトルをとる。そのうち y を頂点とする三つの三角形上の外向き単位法線ヴェクトル場をν_1, ν_2, ν_3 と書く。$\mathbf{e}_3 = (0\quad 0\quad 1)^T$とおく。このとき, 必要なら$\nu_2$と$\nu_3$を入れ替えると, 次の不等式系

$$\begin{aligned}\nu_1\times\nu_2\cdot\mathbf{e}_3>0,\\ \nu_2\times\nu_3\cdot\mathbf{e}_3>0,\\ \nu_3\times\nu_1\cdot\mathbf{e}_3>0\end{aligned}$$

が成り立っていることがわかる。さて $\mathbf{e}_1 = (1\quad 0\quad 0)^T$ および

$$\vartheta = \mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_1$$

とおく。定数 C_Dを

$$\begin{aligned}C_D&=\frac{|(\nu_1\times\nu_3)\times(\nu_2\times\nu_1)|\nu_1\cdot\mathbf{e}_3}{\{(\nu_1\times\nu_3)\cdot\vartheta\}\{(\nu_2\times\nu_1)\cdot\vartheta\}}\\ &+\frac{|(\nu_2\times\nu_1)\times(\nu_3\times\nu_2)|\nu_2\cdot\mathbf{e}_3}{\{(\nu_2\times\nu_1)\cdot\vartheta\}\{(\nu_3\times\nu_2)\cdot\vartheta\}}+\frac{|(\nu_3\times\nu_2)\times(\nu_1\times\nu_3)|\nu_3\cdot\mathbf{e}_3}{\{(\nu_3\times\nu_2)\cdot\vartheta\}\{(\nu_1\times\nu_3)\cdot\vartheta\}}\end{aligned}$$

により定める。筆者は[11] で次の補題を証明した。

補題 1.2. $C_D \neq 0$ かつ *Hölder* 指数が θである $\overline{D}$上の任意の *Hölder* 連続関数 ρに対し，公式

$$\int_D e^{\tau(x_3-y_3)}e^{i\tau x_1}\rho(x)dx = C_D\frac{e^{i\tau y_1}}{\tau^3}\{\rho(y)+O(\frac{1}{\tau^\theta})\} \ as\ \tau \longrightarrow \infty$$

が成り立つ。

C_Dが消えないということは自明ではない。その証明は, C_Dがヴェクトルに関する等式

$$\vartheta C_D = \frac{|(\nu_1\times\nu_3)\times(\nu_2\times\nu_1)|}{\{(\nu_1\times\nu_3)\cdot\vartheta\}\{(\nu_2\times\nu_1)\cdot\vartheta\}}\nu_1$$
$$+\frac{|(\nu_2\times\nu_1)\times(\nu_3\times\nu_2)|}{\{(\nu_2\times\nu_1)\cdot\vartheta\}\{(\nu_3\times\nu_2)\cdot\vartheta\}}\nu_2+\frac{|(\nu_3\times\nu_2)\times(\nu_1\times\nu_3)|}{\{(\nu_3\times\nu_2)\cdot\vartheta\}\{(\nu_1\times\nu_3)\cdot\vartheta\}}\nu_3$$

を満たすこと (これ自体自明ではない) およびν_1,ν_2,ν_3の一次独立性から従う。

我々の, (1.1) の解 u に対する, Carleman タイプの公式を述べよう。

定理 1.3. 公式

$$u(y)=\frac{1}{C_D}\lim_{\tau\longrightarrow\infty}\tau^3e^{-i\tau y_1}\int_{\partial B\cap\{x_3>t\}}(\frac{\partial u}{\partial\nu}v-\frac{\partial v}{\partial\nu}u)d\sigma(x) \tag{1.6}$$

が成り立つ。

証明. トレース定理を凸領域 $B\cap\{t<x_3<t+\epsilon\}, 0<\epsilon<y_3-t$ で v に適用する。すると $\|v\|_{L^2(B\cap\{x_3=t\})}$および $\|\nabla v\|_{L^2(B\cap\{x_3=t\})}$ は$\tau\longrightarrow\infty$ のとき指数的に減衰することが, 補題 1.1 と $|e^{\tau(x_3-y_3)}e^{i\tau x_1}|\le e^{-\epsilon\tau}$が $x_3=t$ 上成り立つことからわかる。$u\in H^2(\Omega)$ を仮定したから Sobolev の埋め込みより u は Hölder 連続であり, 補題 1.2 を$\rho=u$ に適用して, (1.5) より (1.6) を得る。 □

Nakamura-Uhlmann [21](Tolmasky[25]) は主部が Laplacian である方程式

$$-\triangle u+A(x)\cdot\nabla u+V(x)u=0 \text{ in } \Omega \tag{1.7}$$

に対して exponentially growing solutions を構成している。その方法を使うと (1.7) の Cauchy 問題にたいしても, (1.6) タイプの公式を得るのに必要な v を構成することができしたがって Carleman タイプの公式を得る。構成にはあるクラスの擬微分作用素が使われていて複雑である。その詳細は省略する。

注意 *1.1.* 逆問題への応用という観点からは, 方程式

$$-\nabla\cdot M(x)\nabla u+A(x)\cdot\nabla u+V(x)u=0 \text{ in } \Omega$$

に対する Cauchy 問題の解にたいする Carleman タイプの公式も重要である。ここで $M(x)$ は実対称正値行列値関数である。2 次元では適当な変換で (1.7) に帰着できるからなんとかなるが, 3 次元では未解決である。

注意 *1.2.* 変数係数の, Maxwell 方程式系および弾性体の方程式系にたいしても Carleman タイプの公式を探すことは, 逆問題への応用という観点から重要である。

注意 *1.3.* Γが平坦, すなわち, 平面の一部であるときに (1.1) の解に対する Carleman タイプの公式を見つけることも大変興味深い問題である。

最後に Yarumukhamedov[27]~[30] の仕事について触れておく。彼はここで扱った領域をふくみ, さらには錐の母線を含む表面と曲面とで囲まれた領域において Laplace 方程式, Helmholtz 方程式の Cauchy 問題に対し Carleman タイプの公式を与えている。それは定理 1.1 のよりよくなった高次元版と考えてよいだろう。彼の方法は, パラメタをふくむ特別な基本解を構成し, それを使って解を境界全体の Cauchy データを使って表示する。次に表示公式において, 基本解に含まれているパラメタに関する極限をとり, 必要でない Cauchy データからの寄与を消すことでなされる。このような基本解は Carleman 関数と呼ばれている。ただ原論文は記号と仮定に一貫しないところがあり, 証明も省略か粗くしか述べられていないので, 解読するには困難がある。彼はまた Cauchy 問題の可解性の条件も述べている。

1.2 一意接続定理との関係.

ここでは exponentially growing solution と一意接続定理との関係を述べる。最初に定理 1.3 の証明には一意接続定理は全く使われていないということを強調しておく。必要なのは, Lipschitz 境界をもつ領域でのトレース定理, Fourier 変換のいくつかの基本的事実そして Cauchy-Schwartz の不等式より導かれる $(\partial_3+i\partial_1)^{-1}$についてのある評価である。定理 1.3 から一般の領域Ωにおける Schrödinger 方程式に対する一意接続定理が導かれる。もちろんその一意接続定理自体は良く知られておりなんら新しくない。またこの導出の過程も明らかだろうが念のため述べておく。

以下ではΩは$\mathbb{R}^3$における一般の連結開集合であるとする。uは方程式(1.1)の$H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$解であるとする。この正則性は楕円型方程式の内部正則性の結果を使えば弱められるがそれは議論の本質部分ではないので敢えて弱めない。

定理 1.4. UはΩの空でない開集合であるとする。もしUで$u=0$ならば実はΩ全体で$u=0$。

注意 *1.4.* 一意接続定理の定式化はいろいろあるが, 逆問題への応用という観点からは, 後述するCauchy問題の解の一意性とともにこれで十分であった(将来はわからない)。

注意 *1.5.* 定理1.4の証明は, Nirenberg[22]の議論に添うが, 始めの部分はKumano-go [18]を参照している。

証明. 集合

$$A=\{x\in\Omega\,|\,u\text{ は }x\text{ のある近傍で }0\}$$

を考える。$U\subset A$よりAは空でなく, 明らかに開集合である。Ωは連結だから, あとはAが閉集合であることを示せばよい。そのためには$\partial A\subset A$を示すことが必要十分であるのでこれがなりたたない, すなわち, ある点$x_0\in\partial A$で$x_0\in\Omega\setminus A$を満たす点が存在したとして矛盾を導こう。

$d=\mathrm{dist}\,(x_0,\partial\Omega)\,(>0)$とおく。このとき$B_d(x_0)\subset\Omega$. $x_0\in\partial A$より$x'\in B_{d/2}(x_0)$かつ$x'\in A$である点x'が存在する。このときx'を中心としAに含まれる最大の開球B'が存在する。そして$\partial B'$上の点でAに含まれない点が存在する。これは$\partial B'$のcompact性からしたがう。それをx"と書こう。

このとき実はx"$\in A$である。これを示すのにKumano-goでは適当な変換で基準形の楕円型方程式の初期値問題の局所解の一意性定理が適用できる状況に帰着させて終わりとしている。その証明はより一般の楕円型方程式に対しても適用できる利点がある。

ここではKelvin変換の特殊な性質を使って定理1.3が適用できる状況へもっていく。ところでB'の中心は原点であり, その半径は1およびx"$=(0,0,1)$としても一般性失わない。このB'に関する関数のKelvin変換とは, 一般の関数$u=u(x)$に対し, 3次元では

$$v(y)=\frac{1}{|y|}u(\frac{y}{|y|^2}) \tag{2.1}$$

で定まる変換である。このとき次の等式が成り立つ([18, p.260]):

$$(\triangle_y v)(y)=\frac{1}{|y|^5}(\triangle_x u)(\frac{y}{|y|^2}). \tag{2.2}$$

1 階微分の項が全くでてこないところが良い点である。ちなみに Nirenberg[22] では従属変数の変換をともなわない Kelvin 変換もどきを使っていて, それにかんしては (2.2) は成り立たず右辺に 1 階微分の項が現れてしまう。

さて写像

$$\Omega \setminus B' \ni y \longmapsto \frac{y}{|y|^2} \in B'$$

の像Ω'を考える。Ω'は開集合であり$\partial B' \subset \partial\Omega'$ かつ十分小さい$\epsilon > 0$ にたいして$\Omega" \equiv B' \cap \{x_3 > 1-\epsilon\} \subset \Omega'$ とできる。このとき (1.1) の解 u に対し (2.1) で定まる v は, (2.2) を満たし, したがって

$$-\triangle v + \frac{1}{|y|^4} V(\frac{y}{|y|^2}) v = 0 \text{ in } \Omega"$$

を満たすことが分かる。このとき v の$\partial B' \cap \{x_3 > 1-\epsilon\}$ 上の Cauchy データは 0 である。定理 1.3 をこの v に適用し $B' \cap \{x_3 > 1-\epsilon\}$ で $v=0$ が成り立つことが結論できしたがって $x"$の近傍で $u(x) = 0$ がしたがう。これは $x" \in A$ を意味し矛盾である。以上が定理の証明である。 □

細かいことに目をつぶると, 結局定理 1.4 は, exponentially growing solution を使って証明されたということになる。さらには一般のΩおよび$\partial\Omega$の空でない開集合Γ における (1.1) の Cauchy 問題の解の一意性が定理 1.4 から従う。この議論は良く知られたものであり省略する。とにかく exponentially growing solutions と一意接続定理あるいは Cauchy 問題の解の一意性が結びついたというのは新鮮な驚きであった。

2. 境界値逆問題 (電気インピーダンストモグラフィにおける再構成アルゴリズムの提唱へつながる公式)

あたえられた物体の表面から電流を流し込み, その結果生じた表面上の電位分布を観測する。これを何回か実行し (無限回も含める), 表面から流し込んだ電流と対応する表面上の電位分布の対のデータを得る。このデータから, 物体内の導電率の分布を再構成する問題を数学的に定式化したのが, Calderón が記念碑的論文[2] で提出した問題である。この問題は, 粗く言うと, ある 2 階楕円型方程式の, 有限または無限個の解の, 境界における Cauchy データからその方程式の係数に関する情報を引き出す問題であり, 電気インピーダンストモグラフィを数学的に定式化した典型的な逆問題である。

2.1 三つの方法.

導電率が連続であるよりももっと滑らかな場合は, Nachman ([19] および 2 次元では[20]) による無限個のデータを用いた導電率自身の再構成公式があるが, その不連続面を再構成する問題も応用上重要であると考えられている。筆者はこの問題に取り組み, 不連続面を再構成するための 3 つの数学的方法, すなわち, 探針法 (the probe method),

囲いこみ法 (the enclosure method) および切断法 (the slice method) を提唱するに至った。これら三つの方法を粗く述べると以下のとおりである。

(1) 探針法は, 不連続面を, 物体内に仮想的に侵入する針が最初に当たる点と把らえ直し, 勝手に与えた針の侵入経路に沿って針の先端が移動していくときそれが不連続面に当たるかどうか当たるとすればいつかを観測データから予言するもので, 不連続面によって囲まれた物体 (これを介在物という) そのものの再構成公式をもたらした ([5])。さらに[6] では介在物内部の導電率の再構成公式を Nachman の結果へ帰着させて求めた。

(2) 囲い込み法は, ある方向からそれに直交する平面を遠くから下降させたときそれがいつ不連続面に当たるかを観測データから予言するものであり, 介在物の凸包の再構成公式をもたらした ([7])。

(3) 切断法は, 勝手に与えた平面上の半平面状の形をした刃を遠くから下ろしてきたときそれが不連続面に当たるかどうかまた当たるとすればいつかを観測データから予言し, これは介在物の平面による切断面の凸包の再構成公式をもたらした ([15])。

これら三つの方法の詳細な日本語による解説は, 東京都立大学での筆者自身による講義録[13] および講究録[14] を参照していただきたい。英文では[8] がある。

ここで特に強調しておきたいのは, (2) の囲い込み法については, 最近筆者は Siltanen, S.(Finland) の協力を得て, 対応する 2 次元問題において, その数値実験をなすに至ったこと ([17])。さらにこの囲い込み法は, 1 個の観測データから多角形状の介在物の凸包を再構成するための単純な公式をもたらしたこと ([9], [10])。そして最近大江貴司 (岡山理科大学) の協力を得て, [9] で得られた公式の数値実験をなすに至った ([16])。ただし (1), (3) については数値実験が容易ではなく, この公式をより単純にすることは大きな課題である。

注意 *2.1.* 今後の課題は, 凸包でなくそのものの形および介在物のさらにそのなかの未知の介在物の形をもたらす, できるだけ単純な公式を発見することである。

2.2 囲い込み法の応用.

ここでは観測データは無限個であるが, 電位分布の測定点が表面上の固定された 2 点であるという, この点でより実際的な状況での, 多角形状の介在物の凸包の再構成公式を紹介する ([12])。

最初に問題の数学的な定式化を述べよう。Ωは 2 次元の有界領域でその境界は滑らかであるとする。Ω に含まれる未知の介在物を D で表わす。ここでは, D は開集合で $\overline{D} \subset \Omega$ をみたし簡単のため D は連結であると仮定する。さらにこのとき D を含むΩの導電率γは

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \Omega \setminus D, \\ k, & \text{if } x \in D \end{cases}$$

で与えられると仮定する。ここで k は $k \neq 1$ をみたす未知の正の定数である。$g \in L^\infty(\partial\Omega)$ で境界上に与える電流密度分布を表わそう。Ω 内に電流の発生源がないとすれば, このとき

$$\int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0$$

がなりたっていなければならない。逆にこの条件をみたす g にたいし

$$\nabla \cdot \gamma \nabla u = 0 \text{ in } \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ on } \partial\Omega$$

の弱解 $u \in H^1(\Omega)$ が定数をのぞいてただ一つ存在する。この u は電流密度分布 g によって発生したΩ内の電位分布である。u が$\overline{\Omega}$上 Hölder 連続であることは良く知られている。

境界上の固定された 2 点 P, Q を与える。このとき対応

$$\Lambda_\gamma(P,Q) : g \longmapsto u(P) - u(Q)$$

がうまく定義される。$u(P) - u(Q)$ は, 2 点 P, Q 間の電位差をあらわす。$\Lambda_\gamma(P,Q)$ を, 2 点 P, Q において制限された Neumann-to-Dirichlet 写像と呼ぶことにしよう。

Inverse Problem 2 点 P, Q を固定する。P, Q において制限された Neumann-to-Dirichlet 写像から D の存在する場所に関する情報を引き出すこと。

この定式化はきわめて自然であるにもかかわらず, なぜか誰も論じていないのは驚きである。筆者はこの問題を[12] で提出し, D が後述する条件を満たす多角形であるとき, D の凸包に関する情報が引き出せることを示した。より詳しくは D の支持関数

$$h_D(\omega) = \sup_{x \in D} x \cdot \omega, \ \omega \in S^1$$

を$\Lambda_\gamma(P,Q)$ から直接計算する公式を発見した。

そのアイデアを述べよう。その公式ではLaplace方程式に対するexponentially growing solution

$$v = e^{\tau x\cdot(\omega+i\omega^{\perp})},\ \tau > 0$$

が中心的な役割を果している。ここで$\omega^{\perp}$は$\omega\cdot\omega^{\perp}=0$を満たす$S^1$の要素である。各$t\in\mathbb{R}$に対し関数

$$e^{-\tau t}v = e^{\tau(x\cdot\omega - t)}e^{i\tau x\cdot\omega^{\perp}}$$

の$\tau\longrightarrow\infty$のときの挙動をみると, $|e^{-\tau t}v|$は$x\cdot\omega > t$を満たすxに対しては指数的に増大し, $x\cdot\omega < t$を満たすxに対しては指数的に減少することがわかる。この意味で直線$x\cdot\omega = t$は"波"$e^{-\tau t}v$の"波面"と考えられる。そこでこの波を$t=\infty$から$t=-\infty$までω方向から下降させその$\partial\Omega$上の法線微分

$$g = \frac{\partial(e^{-\tau t}v)}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}$$

を$\partial\Omega$上の電流密度分布として与えることにより, 波面$x\cdot\omega=t$がDに最初にぶつかるようなtすなわち$h_D(\omega)$が, 各tに対する"指示関数"

$$I_\omega(\tau,t) = \{\Lambda_\gamma(P,Q) - \Lambda_1(P,Q)\}g$$

の$\tau\longrightarrow\infty$における挙動から決定できるであろう。右辺は$g$を入力したときの$D$による"反射波"すなわち

$$\nabla\cdot\gamma\nabla w = -\nabla\cdot(k-1)\chi_D\nabla(e^{-\tau t}v)\ \text{in}\ \Omega,$$
$$\frac{\partial w}{\partial\nu} = 0\ \text{in}\ \partial\Omega$$

の解wから計算される$w(P)-w(Q)$をみていることにほかならない。[12] で得られた二つの公式は次のとおり。

定理 2.1. Dは条件

$$diam\,D < dis\,(D,\partial\Omega)$$

を満たす多角形であるとする。有限個の方向$\omega\in S^1$を除いて二つの公式

$$\{t\in\mathbb{R}\,|\,\lim_{\tau\longrightarrow\infty} I_\omega(\tau,t) = 0\} = [h_D(\omega),\infty[\tag{3.1}$$

$$\lim_{\tau\longrightarrow\infty}\frac{\log|I_\omega(\tau,t)|}{\tau} = h_D(\omega) - t \tag{3.2}$$

がなりたつ。

除かれた有限個の方向ωとは, 直線 $x \cdot \omega = h_D(\omega)$ が∂D 上の点と 2 個以上の共有点をもつような方向である。このような方向は有限個でありそれを選ぶことはまずあり得ない。

(3.2) から近似式

$$h_D(\omega)\tau \approx \log |I_\omega(\tau, 0)|, \ \tau >> 1$$

を得る。これの数値実験を実行し P, Q の配置が $h_D(\omega)$ の近似計算にどのように影響するかをしらべるのは面白そうである。

注意 *2.2.* 興味ある未解決問題としては, Ωが 3 次元の領域であるときにどうかということである。対応する問題として二つのタイプが考えられるであろう。ひとつは P, Q を固定すること, もうひとつは Q を固定し P が境界上の閉じた曲線を動いてもいいとしたとき。後者のほうが, 前者よりも, より多くの情報を含んでいるはずである。

注意 *2.3.* また $(P, Q) = (P_1, Q_1), \cdots, (P_m, Q_m), m < \infty$ のように測定点の個数をもっと増やしたらどうなるか (ただし有限個)。これも興味ある問題である。P が境界全部を動いても良いというのであれば既に筆者が[10] で (3.1), (3.2) に対応する公式を得ている。

Acknowledgement

This research was partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (No. 11640151) of Japan Society for the Promotion of Science.

References

1. Aizenberg, L., *Carleman's formulas in complex analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1993.
2. Calderón, A. P., *On an inverse boundary value problem*, in Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (W. H. Meyer and M. A. Raupp, eds.), Brazilian Math. Society, Rio de Janeiro (1980), 65–73.
3. Carleman, T., *Les fonctions quasi analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926, pp. 3–6.
4. Grisvard, P., *Elliptic problems in nonsmooth domains* (1985), Pitman, Boston.
5. Ikehata, M., *Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements*, Commun. Partial Diff. Eqns **23** (1998), 1459–1474.
6. ______, *Reconstruction of inclusion from boundary measurements*, to appear, J. Inv. and Ill-Posed Problems.
7. ______, *Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements*, to appear, J. Inv. and ILL-Posed Problems.
8. ______, *How to draw a picture of an unknown inclusion. Two mathematical inversion algorithms*, J. Inv. and ILL-Posed Problems **7** (1999), 255-271.
9. ______, *Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data*, Inverse Problems **15** (1999), 1231–1241.

10. ______, *On reconstruction in the inverse conductivity problem with one measurement*, Inverse Problems **16** (2000), 785–793.
11. ______, *Exponentially growing solutions and the Cauchy problem*, preprint (1999).
12. ______, *On reconstruction from a partial knowledge of the Neumann-to-Dirichlet operator*, preprint (2000).
13. ______, 不連続面の観測データによる再構成の数理 – 境界値逆問題, 逆ソース問題および逆散乱問題における再構成公式 –, 都立大学数学教室セミナー報告, 2000.
14. ______, 境界値逆問題における介在物の再構成問題 – 囲い込み法 –, 解析接続の応用, 数理解析研究所講究録, vol. 1155, 2000, pp. 60–72.
15. Ikehata, M. and Nakamura, G., *Slicing of a three-dimensional oobject from boundary measurements*, Inverse Problems **15** (1999), 1243–1253.
16. Ikehata, M. and Ohe, T., *the enclosure method and its numerical implementation*, in preparation.
17. Ikehata, M. and Siltanen, S., *Numerical method for finding the convex hull of an inclusion in conductivity from boundary measurements*, Inverse Problems **16** (2000), 1043–1052.
18. Kumano-go, H., *Partial differential equations (in Japanese)*, Kyouritsu syuppan, Tokyo, 1978.
19. Nachman, A., *Reconstructions from boundary measurements*, Ann. Math. **128** (1988), 531–577.
20. ______, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Ann. Math. **143** (1996), 71–96.
21. Nakamura, G. and Uhlmann, G., *Global uniqueness for an inverse boundary problem arising in elasticity*, Invent. Math. **118** (1994), 457-474.
22. Nirenberg, L.., *Uniqueness in Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients*, Comm. Pure Appl. Math **10** (1957), 89-105.
23. Sylvester, J. and Uhlmann, G., *A gobal uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math. **125** (1987), 153–169.
24. Tarkhanov, N. N., *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations,*, Mathematical topics, vol. 17, Akademic Verlag, Berlin, 1995.
25. Tolmasky, C. F., *Exponentially growing solutions for nonsmooth first-order perturbations of the Laplacian*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 116–133.
26. Uhlmann, G., *Developments in inverse problems since Calderón's foundational paper*, in Harmonic analysis and partial differential equations (Christ, M., Kenig, C. E. and Sadosky, C., eds.) (1999), The University of Chicago Press, Chicago and London, 295–345.
27. Yarmukhamedov, Sh., *Integral representations of harmonic functions in multi-dimensions (in Russian)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **204** (1972), 799-802.
28. ______, *On the Cauchy problem for the Laplace equation (in Russian)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **235** (1977), 281–283.
29. ______, *Harmonic extension of continuous functions defined on a piece of the boundary (in Russion)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **327** (1992), 37–41.
30. ______, *Continuing solutions to the Helmholtz equation*, Doklady Math. **56** (1997), 887-890.